20. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Uma Equação Diferencial (ED) é uma equação que relaciona diferencias de uma função dependendo de uma variável (ED ordinária) ou de várias (ED parcial). A ordem de uma Equação Diferencial é dada pelo diferencial de maior ordem, vale destacar que se a ordem de uma ED for zero, ela pode ser tratada como algébrica.

Um sistema de ED's é o conjunto de uma ou mais equações que relacionam os diferenciais de uma ou mais funções. É essencial que todas as funções dependam do mesmo conjunto de variáveis. A ordem do sistema e as definições de ordinária e parcial são as mesmas das Equações Diferenciais. Um exemplo de sistemas de ED's Parciais (EDP) são a Equação tridimensional de Navier-Stokes.

Outra definição importante para as ED's é a linearidade ou não-linearidade. A principal característica da linearidade é que ela permite combinar diretamente soluções para formar novas soluções, através de um princípio geral de superposição. Esse princípio é aplicável a todas as equações lineares, incluindo: sistemas algébricos lineares, ED ordinária, EDP, problemas de contorno, entre outras.

Uma ED é chamada, seja ordinária ou parcial, homogênea e linear quando, em ambos os lados, há termos de soma, em que cada um envolve a variável dependente u ou um dos termos diferenciais, por exemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(x-t)\, u$$

Quando a ED envolver produtos da variável dependente e seus diferenciais, será não-linear.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

em que $u\,\partial u/\partial x$ é o termo de não linearidade.

Mesmo lineares, as EDP's possuem elevado grau de dificuldade em suas soluções, e apenas algumas são completamente solucionadas. A maioria das soluções são expressas como séries infinitas, necessitando de ferramentas analíticas para avaliar sua convergência e propriedades. Todavia, para a maioria das EDP's lineares, sua solução aproximada é possível através de métodos numéricos (Ex. diferenças finitas ou elementos finitos)

20.1 – Modelagem de problemas físicos

O objetivo da modelagem de problemas físicos é encontrar um conjunto de equações matemáticas que descrevam adequadamente um fenômeno físico e possibilitem encontrar uma solução exata ou uma solução aproximada. A solução exata usualmente é fruto de um método de solução analítica encontrado através de métodos algébricos e diferenciais; enquanto a solução aproximada é resultante da aproximação da solução analítica empregando-se métodos numéricos, que usualmente baseiam-se em operações aritméticas elementares.

20.2 – Classificação de Problemas Físicos

A maioria dos problemas físicos pode ser dividida em sistemas discretos e contínuos. Um sistema discreto consiste em um número finito de elementos interconectados, enquanto um sistema contínuo envolve um fenômeno que ocorre sobre uma região contínua. Exemplo do primeiro é um conjunto de massas conectadas entre si por um sistema de molas. Um exemplo para o segundo tipo de sistema é a condução de calor numa chapa.

- **Problemas de equilíbrio:** são aqueles em que o sistema permanece constante em relação ao tempo. São também conhecidos como problemas em regime permanente ou no estado estacionário. Exemplos são a estática de estruturas, o escoamento compressível em regime permanente e a distribuição de campos eletrostático e magnético estacionários. Geralmente são descritos por um sistema de equações lineares e, em casos particulares, por sistema de equações não lineares ou por equações diferenciais ordinárias com condições de contorno fechado.
- **Problemas de autovalores:** são considerados como extensão dos problemas de equilíbrio nos quais valores críticos ou específicos de certos parâmetros adicionais devem ser determinados, além daqueles correspondentes ao estado estacionário. Exemplos desta categoria de

problemas físicos são a flambagem e a estabilidade de estruturas, problemas de frequência natural em sistemas mecânicos e a determinação de ressonância em circuitos elétricos. A solução deste tipo de problema envolve tanto a solução de sistema de equações lineares com matriz de coeficientes singular ou por equações diferenciais com as condições de contorno fechado.

- **Problemas de propagação:** incluem os fenômenos transitórios e de regime não-permanente e são aqueles nos quais os estados subsequentes de um sistema devem ser relacionados com um estado conhecido inicialmente. São exemplos deste tipo de problema a propagação de ondas em meios elásticos contínuos, vibrações auto excitadas e a condução térmica em regime transiente.

A Tabela 20.1 esquematiza as relações entre os principais tipos de problemas físicos e as correspondentes equações matemáticas que modelam os fenômenos físicos.

Tabela 20.1 - Relação entre os tipos de problemas e o correspondente conjunto de equações matemáticas que governam o fenômeno.

CLASSIFICAÇÃO DO EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O FENÔMENO FÍSICO		
Problema Físico	Discreto	Contínuo
Equilíbrio	Sistema de equações algébricas simultâneas	Equações diferenciais ordinárias ou parciais com condições de contorno fechadas
Autovalores	Sistema de equações algébricas simultâneas ou equações diferenciais ordinárias redutíveis a forma algébrica	Equações diferenciais ordinárias ou parciais com condições de contorno fechadas
Programação	Sistema de equações diferenciais ordinárias simultâneas com	Equações diferenciais parciais com condições iniciais prescritas e

	condições iniciais desconhecidas	condições de contorno abertas

A seguir, serão tratadas as equações diferenciais parciais de 2ª ordem lineares, utilizando o método das diferenças finitas para obtenção a solução numérica.

20.3 - Classificação das equações diferenciais parciais de 2ª ordem

As equações diferenciais parciais (EDP) de 2ª ordem podem ser classificadas em três tipos: elípticas, parabólicas e hiperbólicas. A classificação das EDPs objetiva especificar os métodos numéricos mais apropriados em sua resolução. Geralmente, os problemas de fronteira fechada são descritos por equações elípticas, enquanto os problemas de fronteira aberta são descritos por equações parabólicas ou hiperbólicas.

Se a solução de um problema for descrita pela variável $u = (x, y)$, a EDP que expressa a relação entre *u* e as variáveis independentes *x* e *y* pode ser escrita, genericamente, como:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \qquad (20.1)$$

Na qual a, b, c, d, f e g são constantes ou funções variáveis independentes x e y. Os coeficientes a, b e c são tais que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \qquad (20.2)$$

Se os coeficientes a, b e c forem constantes, pode-se classificar as EDPs lineares de forma análoga às curvas cônicas tridimensionais (Figura 20.1) através das seguintes relações:

- EDPs hiperbólicas: $b^2 - ac > 0$, duas raízes reais e distintas
- EDPs parabólicas: $b^2 - ac = 0$, duas raízes reais e idênticas
- EDPs elípticas: $b^2 - ac < 0$, duas raízes conjugadas complexas

A classificação das EDPs em três grupos representativos tem importância na sua análise teórica, na descrição de métodos numéricos e nas

Prof. Marco Aurélio Holanda de Castro, Ph.D.
e-mail: marco@ufc.br

aplicações. A Tabela 20.2 apresenta os principais tipos de equações diferenciais parciais.

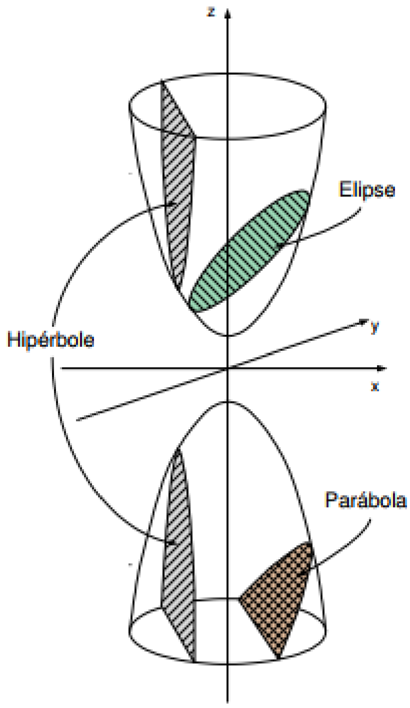

Figura 20.1 – Curvas cônicas representativas das EDPs lineares

Tabela 20.2 – Tipos de equações diferenciais parciais

NOME	TIPO	EQUAÇÃO
Equação de Laplace	Elípitica	$\nabla^2 u = 0$
		$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$
Equação de Poisson	Elípitca	$\nabla^2 u = c$
		$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = c$
Equação de Fourier	Parabólica	$\alpha \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$
		$\alpha(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - u_t = 0$
Equação da onda	Hiperbólica	$c^2 \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
		$c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - u_{tt} = 0$
Equação de Lorentz	Hiperbólica	$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x, y, z, t)$
		$c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - u_{tt} = -f$

Para resolver as equações diferenciais parciais do fluxo de água subterrânea, as informações sobre a carga (h) e/ou gradiente da carga (∇h) devem ser especificadas ao longo dos limites de um domínio do modelo. Os descritores de diferentes tipos de condição de contorno (BC) foram extraídos de matemáticos fundadores principalmente do século 19 (Cheng e Cheng 2005). Matematicamente, existem cinco tipos diferentes de BC, incluindo: Dirichlet (Tipo 1), Neumann (Tipo 2), Robin (Tipo 3), Cauchy e Mixed (Liu 2018). Esses nomes às vezes são usados na comunicação dos BCs dos modelos de fluxo de água subterrânea e, portanto, a associação correta entre a nomenclatura e a forma matemática dos BCs é importante para comunicar adequadamente as características do modelo.

A distinção entre os diferentes tipos de BC é consistente em toda a literatura matemática (e.g., Weisstein 2019). No entanto, parece haver inconsistências na nomenclatura de BCs de modelos de fluxo de água subterrânea, como demonstraremos mais tarde neste artigo.

Condição de Contorno – Dirichlet (Tipo 1)

O Dirichlet BC deriva do problema de Dirichlet, que se refere a um problema de contorno de uma região fechada Ω, com limite Γ,onde o BC é definido por (Cheng e Cheng 2005):

$$\phi = f(\boldsymbol{x}); \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma \tag{1}$$

Aqui, ϕ é a variável dependente, $f(\boldsymbol{x})$ é especificada como uma função contínua e $\boldsymbol{x}$ representa as dimensões temporais e espaciais.

Em aplicações de água subterrânea da condição de contorno Dirichlet, a carga hidráulica (ou em alguns casos a carga de pressão), h [L], é especificada. O termo "condição de carga especificada" é usado onde h é descrito como uma função de espaço e/ou tempo, enquanto os valores de h que são constantes (ou constantes por partes) no tempo e no espaço são referidos como "condições de carga constante" (Franke et al. 1987). Assim, a condição Dirichlet aplicada a problemas de fluxo de água subterrânea pode ser escrita como:

$$h = \begin{cases} h_0 & \text{condição de carga constante} \\ f(x) & \text{condição de carga específica} \end{cases} \quad (2)$$

onde h_0 é uma constante.

As condições de Dirichlet mais comumente representam a influência dos corpos d'água superficiais nos modelos de água subterrânea, para situações em que a carga imposta ao sistema de água subterrânea pode ser considerada independente das variações do fluxo subterrâneo. Isso requer forte conectividade das águas subterrâneas-superficiais e volumes de água superficiais suficientemente grandes e/ou taxas de fluxo que sejam estáveis apesar das flutuações das águas subterrâneas (Bear 1979). Outra aplicação comum da condição Dirichlet para problemas de fluxo de água subterrânea é a imposição de pressão atmosférica em locais de descarga para a superfície (e.g., uma face de infiltração; Scudeler et al. 2017). Isso presume que a água não se acumula em profundidades significativas nas depressões da superfície e que a infiltração é contínua e ocorre em locais conhecidos.

Condição de Contorno – Neumann (Tipo 2)

Na condição de contorno Neumann, a derivada normal da variável dependente é definida no contorno, como (Cheng e Cheng 2005):

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial n} = f(\boldsymbol{x}); \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma \quad (3)$$

onde n é o normal externo de Γ, e $f(\boldsymbol{x})$ é uma função contínua. Para problemas de fluxo de água subterrânea, a derivada normal em Neumann é ∂h/∂n, o que implica uma descarga específica (ou velocidade de Darcy, q [L/T]) de água para dentro ou para fora da fronteira com base na Lei de Darcy (Franke et al. 1987). Seguindo a terminologia usada para definir diferentes tipos de condições de Dirichlet, uma "condição de fluxo especificado" se refere a fluxos de fronteira que variam no espaço e/ou tempo, enquanto uma "condição de fluxo constante" se refere a fluxos de fronteira que são constantes (ou constante por partes) no tempo e no espaço (ou seja, ∂h/∂n=constante). Definindo $q = 0$ ao longo de um limite de modelo de água subterrânea é um caso especial, noemando como uma “condição sem fluxo”. É digno de nota que o modelador frequentemente define o fluxo volumétrico normal para a região limitante (*Q* [L3/T]) em aplicações práticas de condições de fluxo especificado e constante. Para aquíferos confinados, definir Q como constante implica que ∂h/∂n é constante. No entanto, em situações onde a condutância de limite varia (por exemplo, em modelos de aquíferos não confinados), a razão entre Q e *∂h/∂n* não é constante e, em vez disso, *h∂h/∂n* é constante. Portanto, definir Q com um valor constante pode não conduzir a uma condição de contorno de Neumann.

A atribuição de condições sem fluxo em modelos de água subterrânea para representar estratos de baixa permeabilidade, descontinuidades geológicas e divisões hidráulicas é comum. As estimativas de fluxo de base para rios e lagos, descarga de água subterrânea submarina para o mar e recarga através da superfície da terra são rotineiramente usadas para definir condições de fluxo constante e especificadas. Na prática, no entanto, é menos comum saber com precisão os fluxos de entrada/saída de um sistema de água subterrânea em comparação com o conhecimento de cargas, que pode ser verificado diretamente de poços de monitoramento e, em alguns casos, níveis de água da superfície e topografias (e.g., Knowling and Werner 2016).

Condição de Contorno – Robin (Tipo 3)

A condição de contorno Robin, é uma combinação linear das condições Dirichlet e Neumann, conforme (Gustafson 1999):

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + a\phi = f(\boldsymbol{x}); \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma \tag{4}$$

onde a é um coeficiente diferente de zero, que pode ser constante ou variável. Substituindo ϕ por *h*, aplicando a Lei de Darcy e definindo a para −1/L e $f(\boldsymbol{x})$ para $-h_{ref}$/L, a seguinte fórmula é obtida que é prontamente aplicável para escoamentos através de um modelo de fronteira:

$$Q = -\frac{KA}{L}(h - h_{ref}) \tag{5}$$

onde *K*[L/T] é a condutividade hidráulica do aquífero, *A* é a área da seção transversal da fronteira através da qual a água subterrânea flui, h_{ref} é uma carga de referência que representa uma externalidade para o domínio do modelo, e *L* é o comprimento sobre o qual a queda de carga $h - h_{ref}$ ocorre. O nome comum na literatura hidrogeológica para condições de contorno da forma dada na Equação 5 é "condição de escoamento dependente da carga" (e.g., Harbaugh 2005). Esta descrição se refere à confiança de *Q* em *h* na fronteira. É comum se referir a *KA/L* como a “condutância de limite”, *C* [L^2/T]. Ambos *C* e h_{ref} podem variar no espaço e no tempo.

A condição Robin pode ser aplicado na modelagem de água subterrânea para representar o truncamento de aquíferos, em que regiões do aquífero que caem fora do domínio do modelo são aproximadas por *C* e h_{ref}. Além disso, o fluxo de/para um rio (em situações em que o nível do lençol freático é mais alto do que o leito do rio) é frequentemente representado usando a Equação 5, com impedância ao escoamento causada pelo leito do rio incluída na parametrização de *C* (e.g., Werner e Laattoe 2016).

Como mencionado acima, definir *Q* para um valor constante para uma situação de aquífero não confinado implica que $h\partial h/\partial n$ é constante. Isso pode ser escrito como $\partial h/\partial n - a/h=0$ e, portanto, $\partial h/\partial n$ e h estão inversamente relacionados. Estritamente falando, isso está fora dos formulários de condições de contorno definidas nesse artigo.

Condição de Contorno – Cauchy

Na condição de contorno Cauchy, tanto a variável dependente quanto sua derivada normal devem ser especificadas ao longo do limite. Isso corresponde à imposição das condições de contorno Dirichlet e Neumann (Arfken e Weber 2005; Liu 2018). A condição Cauchy pode ser expressa como:

$$\begin{cases} \emptyset = f(x); \\ \frac{\partial \emptyset}{\partial n} = g(x); \end{cases} \quad x \in \Gamma \qquad (6)$$

onde $g(x)$é uma função contínua.

A aplicação da Equação 6 aos modelos de água subterrânea implica no conhecimento de *q* (e.g., via Lei de Darcy) e h na fronteira. Problemas práticos de água subterrânea para os quais *q* e h são conhecidos são raros, a tal ponto que não fomos capazes de encontrar exemplos onde a Equação 6 foi aplicada a um caso de modelagem de água subterrânea do mundo real.

Condição de Contorno – Mista

A condição de contorno Mista refere-se ao caso em que a fronteira consiste em segmentos não sobrepostos, cada um com diferentes tipos de contorno (Griffiths et al. 2015). Por exemplo, se o limite (Γ) consiste em duas partes disjuntas: Γ_D com uma condição de contorno Dirichlet e Γ_N com uma condição de contorno Neumann, isso é considerado uma condição de contorno misto, ou Mixed, dada por (Cheng e Cheng 2005; Liu 2018):

$$\begin{cases} \phi = f(x); & x \in \Gamma_\mathrm{d} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = g(x); & x \in \Gamma_\mathrm{n} \end{cases} \tag{7}$$

A grande maioria dos modelos de água subterrânea aplicados a situações práticas compreendem vários tipos de condições de contorno, porque várias combinações de recarga, bombeamento, controle de água de superfície, limites geológicos, divisões de água subterrânea (ou seja, linhas que conectam pontos altos em uma superfície potenciométrica, agindo assim como um escoamento sem fronteira a partir da qual a água flui em direções opostas), linhas de fluxo (ou seja, advectiva vias de partículas de água) e evapotranspiração (por exemplo, em modelos de seção transversal vertical 2D) são usadas para definir tensões externas agindo nos domínios do modelo. Portanto, usando a definição padrão dada acima, pode-se dizer que quase todos os modelos práticos de água subterrânea têm condições de contorno Mistas, o que, portanto, não diferencia de forma significativa um modelo de água subterrânea de outro.

Prof. Marco Aurélio Holanda de Castro, Ph.D.
e-mail: marco@ufc.br

Tabela 1

Terminologia Usada na Descrição das Condições de Contorno na Forma da Equação 4 (i.e., Condição de Contorno Robin)

Referências	Descrição referenciada de condição de contorno Robin
Bear (1972, p.252)	“terceira, ou problema de valor limite de Cauchy”
Bear (1979, pp. 98, 220)	“condição de contorno mista (condição de contorno de terceiro tipo; condição de contorno de Cauchy)”
Bear e Verruijt (1987, pp. 72, 152)	“condição de contorno mista, condição de contorno de terceiro tipo ou uma condição de Cauchy”
Franke et al. (1987, p. 6)	“fluxo dependente da carga, Tipo 3 (condição de contorno mista), Cauchy”
Guo and Langevin (2002, pp. 15 to 17)	“Cauchy (fluxo dependente da carga ou condição de limite misto; Tipo 3)”
COMSOL (2005, pp. 16, 18, 19, 24, 89, 90, 105)	“misto, condição Cauchy”
Holzbecher (2007, pp. 62, 81)	“Terceiro tipo, Cauchy - ou condição de contorno Robin”
Bear and Cheng (2010, pp. 189, 198, 313, 439)	“condição de contorno do terceiro tipo, ou uma condição de contorno Robin”
Barnett et al. (2012, pp. 54, 169)	“Tipo 3, Cauchy ou condição de contorno de gradiente e carga especificada; Tipo 3 (Cauchy ou misto)”
Diersch (2014, p. 196)	“condição de contorno tipo Cauchy (Tipo 3)”
Anderson et al. (2015, p. 77)	“Tipo 3. Limite dependente da carga (condições de Cauchy)”
Thangarajan e Singh (2016, p. 239)	“condição de contorno do tipo mista ou condição de contorno do tipo Cauchy ou limite de fluxo dependente da carga; Condição de contorno do tipo Robin”
de Smedt e Zijl (2017, p. 21)	“Condição de contorno de terceiro tipo (condição de contorno Robin)”
DHI (2017)	“condição de contorno do tipo Cauchy; condições de contorno de transferência de fluidos; Limites da 'carga geral'”
USGS (2018)	“Fluxo Dependente de Carga (Robin ou condição de contorno mista)”